Kuyruk Teorisi(Y. L.)

6. Hafta

Doğum Ölüm Süreci

Tanım. Farz edelim $\{ X_t,\ t \geq 0 \}$ sürekli parametreli ve kesikli durum uzaylı homojen Markov sürecidir. Bu sürecin geçiş olasılıkları olan p_{ij} aşağıdaki koşulu sağlar. $h \to 0$ için

$$P_i(X_h = j) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & ;\ j = i+1 \\ \mu_i h + o(h) & ;\ j = i-1 \\ 1-(\lambda_i+\mu_i)h + o(h) & ;\ j = i \\ o(h) & ;\ j = i \pm 2, i \pm 3, \ldots \end{cases}$$

Bu durumda bu sürece doğum-ölüm süreci denir. λ_i' ye doğum , μ_i 'ye ölüm parametresi denir. Farz edelim

$$\lim_{t \to \infty} p_k(t) = p_k$$

Burada $\boldsymbol{p_k(t) = P(X_t = k)}$ ve bu sürecin durum uzayı $\boldsymbol{E = \{0, 1, \ldots\}}$ ve $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, \ldots}$ değerlerini almaktadır. Bu süreçle ilgili olarak aşağıdaki iki problem ortaya çıkabilir.

a. $p_k(t)$ için diferansiyel denklemin bulunması

b. p_k olasılıklarının hesaplanması.

Burada $p_k(t)$ ve p_k 'nın bulunması için geçiş oranlarının hesaplanması gerekir.

Tanıma göre,

$$\boldsymbol{a_{i,i+1} = p'_{i,i+1}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{i,i+1}(h) - p_{i,i+1}(0)}{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{p_{i,i+1}(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h}$$

$$= \lambda_i$$

$$\boldsymbol{a_{i,i-1} = p'_{i,i-1}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{p_{i,i-1}(h) - p_{i,i-1}(0)}{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{p_{i,i-1}(h)}{h}$$

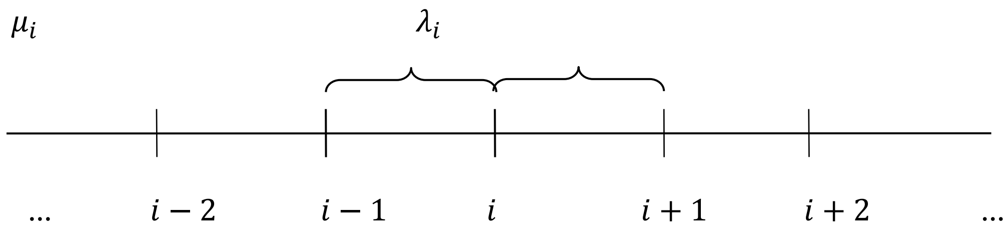
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\mu_i h + o(h)}{h}$$

$$= \mu_i$$

İndislerin farklı olduğu durumlar bulundu. Şimdi de aynı olduğu durumları incelendiğinde.

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1\,, \qquad \sum_j p'_{ij}(t) = 0\,,$$

$[0,\ t]$ aralığında sürekli ve türevlenebilir olduğundan 0 noktasında da sürekli ve türevlenebilir olacağından $\sum_j p'_{ij}(0) = \sum_j a_{ij} = 0$



$$\sum_j a_{ij} = a_{i0} + a_{i1} + \cdots + a_{i,i-2} + a_{i,i-1} + a_{i,i} + a_{i,i+1} + a_{i,i+2} + \ \ldots\ = 0$$

$$a_{i,i-1} + a_{i,i} + a_{i,i+1} = \mu_i + a_{i,i} + \lambda_i = 0 \Rightarrow a_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$$

Buna göre :

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & ; \quad j = i+1 \\ \mu_i & ; \quad j = i-1 \\ -(\lambda_i + \mu_i) & ; \quad j = i \\ 0 & ; \quad j = i \pm 2, i \pm 3, \ldots \end{cases}$$

tanımda başlangıçta ölüm olmadığından $\mu_0 = 0$ dır. a_{ij}’ ler yardımıyla

$$p_j'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) a_{ij}$$

denklemi açıldığında,

$$p_j'(t) = p_0(t)a_{0j} + \cdots + p_{j-2}(t)a_{j-2,j} + p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_j(t)a_{j,j} + p_{j+1}(t)a_{j+1,j} + p_{j+2}(t)a_{j+2,j} + \cdots$$

$$p_j'(t) = p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_j(t)a_{j,j} + p_{j+1}(t)a_{j+1,j}$$

Yukarıdaki denklem sistemi j’ye göre fark t’ye göre diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemin her iki tarafı için denge durumu uygulanırsa ,

$$\lim_{t\to\infty} p_j'(t) = \lim_{t\to\infty} [p_{j-1}(t)a_{j-1,j} + p_j(t)a_{j,j} + p_{j+1}(t)a_{j+1,j}]$$

$$= p_{j-1}a_{j-1,j} + p_j a_{j,j} + p_{j+1}a_{j+1,j}$$

Sol taraf için denge durumuna göre $\boldsymbol{p_k(t) \to p_k}$ iken

$\boldsymbol{p'_k(t) \to p'_k = 0}$ **olur. Buradan**

$$0= p_{j-1}a_{j-1,j} + p_j a_{j,j} + p_{j+1}a_{j+1,j}$$

$$0= p_{j-1}\lambda_{j-1} - (\lambda_j+\mu_j)p_j + +\mu_{j+1}p_{j+1}$$

$$j = 0$$

elde edilir. $j = 0$ alındığında,

$$0 = -(\lambda_0+\mu_0)p_0 + +\mu_1 p_1$$

$$0 = -\lambda_0 p_0 + +\mu_1 p_1$$

Bu fark denklem sistemi çözüldüğünde

$$-\lambda_j p_j - \mu_j p_j + \lambda_{j-1}p_{j-1} + -\mu_{j+1}p_{j+1} = 0$$

$$\mu_{j+1}p_{j+1} - \lambda_j p_j = \mu_j p_j + \lambda_{j-1}p_{j-1}$$

$$p_{j+1} = \frac{\lambda_j p_j}{\mu_{j+1}} \quad (j = 0,1, \dots)$$

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1}p_{j-1}}{\mu_j}$$

$$\vdots$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0 p_0}{\mu_1}$$

olur. O halde ;

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\frac{\lambda_{j-2}}{\mu_{j-1}}\dots\frac{\lambda_0}{\mu_1}\, p_0$$

$$p_j = \prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}p_0$$

$$\boldsymbol{\prod_{i=1}^{j}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \theta_j}$$

$$p_j = \theta_j p_0$$

elde edilir yukarıdaki denklemde her iki taraf j üzerinden toplanırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j p_0$$

$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ olduğundan

$$\boldsymbol{p_0 = 1/\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j}$$

Bu eşitlik yukarıdaki $\boldsymbol{p_j}$ de yerine yazılırsa

$$p_j = \theta_j/\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j$$

olur. Burada iki durum söz konusudur.

1- $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j < \infty$ ise seri yakınsaktır. Bu durumda p_j'ler bulunur (durağan dağılım vardır).

2- $\boldsymbol{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \infty}$ ise seri ıraksak ve $\boldsymbol{p_j = 1/\infty = 0}$

$$p_j = \theta_j p_0 = \theta_j/\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j = \theta_j 0 = 0$$

bu durumda durağan dağılım yoktur. Durağan dağılım olabilmesi için,

$$p_j \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

olması gerekir.